INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

CONCOURS EXTERNE D'ELEVE ATTACHE

et

CONCOURS D'ENTREE A L'ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE

ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

(Division des cadres de gestion statistique)

OPTION A

JUIN 1988

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(durée : 3 heures)

Rappels et notations :

1 - Si p et n sont des entiers naturels strictement positifs, $M_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes ; dans le cas où n=p on écrira $M_n(\mathbb{R})$. I_n désigne la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$.

2 - Si A appartient à $M_n(\mathbb{R})$, N(A) désigne l'ensemble $\{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) : AX = (0)\}$ où (0) désigne la matrice nulle de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

De même, R(A) désignera l'ensemble :

$$\{Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}) : \exists X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) : Y = AX\}.$$

3 - Si A appartient à $M_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A.

4 - $GL_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles appartenant à $M_n(\mathbb{R})$.

5 - On considèrera $M_{n,1}(\mathbb{R})$ comme espace vectoriel euclidien en le munissant du produit scalaire canonique :

$$\text{Si } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}, \ \langle X,Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \ y_i .$$

6 - Si F est une partie de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, $F^{\perp}$ désignera l'orthogonal de F.

7 - Une matrice A appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ sera dite de type Σ si et seulement si $N(A) = N({}^tA)$.

8 - On désignera par Σ_n l'ensemble des matrices de type Σ appartenant à $M_n(\mathbb{R})$.

* *

*

I

1 - Montrer que Σ_n contient :
a) $GL_n(\mathbb{R})$,
b) les matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$,
c) les matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

2 - Montrer que, quelle que soit la matrice A de $M_n(\mathbb{R})$,
a) $R({}^tA) = N(A)^{\perp}$
b) $N({}^tA) = R(A)^{\perp}$

3 - Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$:
a) Montrer que :

$$A \in \Sigma_n \iff R(A)^{\perp} = N(A)$$

b) Montrer que :

$$A \in \Sigma_n \Longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{R}) = R(A) \oplus N(A)$$

La réciproque est-elle vraie ?

Tournez la page S.V.P.

4 - Montrer qu'une CNS pour que $A \in \Sigma_n$ est qu'il existe une matrice T de $M_n(\mathbb{R})$, orthogonale, telle que :

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $D \in GL_r(\mathbb{R})$, avec $r = \text{rang}(A)$.

(On pourra considérer l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ représenté par A dans la base canonique).

5 - Montrer que, si A appartient à $M_n(\mathbb{R})$, A appartient à Σ_n si et seulement si $R(A) = R({}^tA)$.

6 - Montrer les équivalences suivantes pour une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$:
$A \in \Sigma_n \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{R}) : {}^tA = PA \iff \exists Q \in GL_n(\mathbb{R}) : {}^tA = AQ$.

II

On considère <u>dans cette partie</u> une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant la condition $(\mathcal{M})$:

$$(\mathcal{M}) : {}^tA\,A = A\,{}^tA.$$

1 - Montrer que $N(A) = N({}^tAA)$.

2 - Montrer que A appartient à Σ_n.

3 - Soit B appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, vérifiant les hypothèses suivantes :
i) toutes les valeurs propres de B sont réelles,
ii) si α est une valeur propre de B, alors $B-\alpha I_n$ appartient à Σ_n.

a) Montrer que B est diagonalisable.
b) Montrer que B vérifie la condition $(\mathcal{M})$.

III

Le but de cette partie est de préciser quelques résultats de la partie I dans le cas d'une matrice A vérifiant la condition $(\mathcal{M})$.

1 - Soit A appartenant à $GL_n(\mathbb{R})$ et vérifiant la condition $(\mathcal{M})$.
Montrer qu'il existe une matrice P de $GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$${}^tA = AP = PA$$

2 - Soit A, de rang r, appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, et vérifiant la condition $(\mathcal{M})$.

Montrer qu'il existe une matrice P de $GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice D régulière de $M_r(\mathbb{R})$ vérifiant la condition $(\mathcal{M})$, telles que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3 - Montrer que, si A appartient à $M_n(\mathbb{R})$, A vérifie la condition $(\mathcal{M})$ si et seulement s'il existe une matrice P de $GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = AP = PA$.

IV

Le but de cette partie est d'étudier le produit de matrices de type (Σ).

1 - Soient A et B appartenant à Σ_n et vérifiant $AB = BA$.

Montrer que $N(A) + N(B) = N(AB)$.

2 - On suppose vérifiées les hypothèses de la question IV - 1 ; montrer que AB appartient à Σ_n.

3 - Soient A et B deux matrices de Σ_n vérifiant : $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = \text{rang}(AB)$; montrer que AB appartient à Σ_n si et seulement si $R(A) = R(B)$.

4 - Soient A et B appartenant à Σ_n et vérifiant :
$$R(A) = R(B)$$

a) Montrer que $\text{rang}(AB) = \text{rang}(A) = \text{rang}(B)$,
b) Montrer que AB appartient à Σ_n.

5 - A étant une matrice fixée de Σ_n, de rang r, on désignera par E(A) l'ensemble des matrices B de Σ_n telles que $R(A) = R(B)$.

Montrer que E(A) est un groupe multiplicatif de matrices, isomorphe à $GL_r(\mathbb{R})$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail